

УДК 51-77, 517.988

О ПРИЛОЖЕНИИ ТЕОРИИ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ РЫНКА

© С. Е. Жуковский, Н. Г. Павлова

Ключевые слова: α -накрывающие отображения; точки совпадения отображений; функция спроса; функция предложения; равновесные цены.

Исследуется вопрос существования вектора равновесных цен в одной нелинейной модели рынка. Получены достаточные условия существования вектора равновесных цен, изучена устойчивость вектора равновесных цен к малым возмущениям модели. Эти результаты являются следствиями теорем теории α -накрывающих отображений о существовании и устойчивости точек совпадения.

Теория накрывающих отображений имеет приложения в различных областях математики. Традиционно, накрывающие отображения используются при исследовании экстремальных задач. В настоящее время существует ряд работ, в которых результаты теории накрывающих отображений применены для исследования обыкновенных дифференциальных (см. [1]), уравнений Вольтерра (см. [2]) и управляемых систем (см. [3], [4]). В настоящей работе на примере задачи о равновесии в нелинейной модели рынка показано приложение теорем из [5], [6] о точках совпадения α -накрывающего и липшицевого отображений и теоремы из [7] об устойчивости точек совпадения к задачам математической экономики.

В работе рассмотрена модель рынка, на котором продается n товаров, присутствуют производитель и покупатели. Количество приобретаемого покупателем i -го товара зависит от цены товара p_i и находится при решении задачи минимизации функции Р. Стоуна при некоторых ограничениях. Зависимость D_i количества приобретаемого покупателем i -го товара от цен $p_1, p_2, \dots, p_n$ называется функцией спроса на i -ый товар. В рассмотренной модели $D_i : P \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$,

$$D_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = a_i + \frac{\alpha_i \left(I - \sum_{j=1}^n p_j a_j \right)}{p_i \sum_{j=1}^n \alpha_j}, \quad p = (p_1, \dots, p_n) \in P;$$

$$P = \{p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{j=1}^n p_j a_j < I\},$$

где $I > 0$, $\alpha_j > 0$, $a_j > 0$, $j = \overline{1, n}$ – заданные параметры.

Количество поступающего на рынок i -го товара также зависит от вектора цен p и находится в результате решения задачи максимизации функции прибыли производителя. Зависимость S_i количества поступающего на рынок i -го товара от вектора цен p называется функцией предложения i -го товара и в рассматриваемой модели имеет вид

$$S_i(p) = K_i \prod_{j=1}^n p_j^{-\beta_{ij}} - L_i p_i^{-1}, \quad i = \overline{1, m},$$

где

$$K_i = \frac{C_i b_i^{\sum_{j=1}^n \beta_{ij}} \prod_{j=1}^n \beta_{ij}^{\beta_{ij}}}{\left(\sum_{k=1}^n \beta_{ki} \right)^{-\sum_{k=1}^n \beta_{ki}}}, \quad L_i = \sum_{s=1}^m \frac{b_s \beta_{si}}{\sum_{j=1}^n \beta_{sj}}, \quad i = \overline{1, m},$$

$b_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, $\beta_{k,j} > 0$, $k, j = \overline{1, n}$ – заданные параметры.

О п р е д е л е н и е. Вектор $p \in P$ называется *вектором равновесных цен*, если $S_i(p) = D_i(p)$ для любого $i = \overline{1, m}$.

Основная цель работы заключалась в нахождении таких условий на входящие в задачу параметры, что в рассматриваемой модели существует вектор равновесных цен.

Отметим, что вектор равновесных цен является точкой совпадения отображений $S: P \rightarrow \mathbb{R}^k$, $S(p) \equiv (S_1(p), S_2(p), \dots, S_m(p))$ и $D: P \rightarrow \mathbb{R}^k$, $D(p) \equiv (D_1(p), D_2(p), \dots, D_m(p))$. Поэтому к задаче о существовании вектора равновесных цен применимы теоремы о существовании точек совпадения α -накрывающего и липшицева отображений из [5], [6]. В результате применения этих теорем в работе были получены достаточные условия существования равновесных цен в задаче. Кроме того, был исследован вопрос устойчивости точки совпадения при малых возмущениях входящих в задачу параметров. Этот результат был получен как следствие теоремы из [7] об устойчивости точек совпадения α -накрывающего и липшицева отображений.

Представленные результаты выполнены в рамках исследований по теории накрывающих отображений под руководством профессора А.В. Арутюнова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнов А.В., Аваков Е.Р., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613-634.
2. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E., Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. P. 1026-1044.
3. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е. Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1561-1570.
4. Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E., Existence of local solutions in constrained dynamic systems // Applicable Analysis. 2011. V. 90. № 6. P. 889-898.
5. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. 2007. Т. 416. № 2. С. 151-155.
6. Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications, 2009. V. 5. № 1. P. 105-127.
7. Арутюнов А.В. Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Математические заметки. 2009. Т. 86. № 2. С. 163-169.

Поступила в редакцию 10 ноября 2012 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-00427, № 12-01-31140).

Zhukovskiy S.E., Pavlova N.G. ON THE APPLICATION OF COVERING MAPPING THEORY TO NONLINEAR MARKET MODELS

Existence of an equilibrium price-vector in a nonlinear market model is studied. Sufficient conditions for existence of the equilibrium price-vector are obtained. Stability of the equilibrium is studied. These results are obtained as corollaries of theorems from covering mappings theory.

Key words: α -covering mappings; coincidence points; demand function; supply function; equilibrium price-vector.

УДК 517.922, 517.988.5

К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова

Ключевые слова: накрывающие отображения метрических пространств; обыкновенные дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной; управляемые дифференциальные системы.

Получено утверждение о липшицевых возмущениях векторного накрывающего отображения. Этот результат используется для исследования разрешимости управляемой дифференциальной системы неявного вида со смешанными ограничениями на управление и фазовые переменные.

Идея использования накрывающих отображений для исследования дифференциальных управляемых систем была предложена в работах [1, 2]. Для эффективного применения предложенных схем возникла необходимость распространения теорем о липшицевых возмущениях на векторные накрывающие отображения. В работе [3] получены утверждения о возмущениях для отображений, действующих в произведении двух метрических пространств. В данной работе такое утверждение получено для отображений, действующих в произведении любого конечного количества метрических пространств. Этот результат мы используем для исследования управляемых систем, описываемых не разрешенными относительно производной дифференциальными уравнениями со смешанными ограничениями на управление и фазовые переменные.

Приведем определения понятий, необходимых для формулировки основных результатов.

Пусть заданы метрические пространства (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) . Обозначим через $B_X(x, r)$ замкнутый шар с центром в точке x радиуса $r > 0$ в пространстве X (аналогичное обозначение используем для Y и конкретных метрических пространств, рассматриваемых ниже).

О п р е д е л е н и е 1 [4, определение 1]. Пусть задано число $\alpha > 0$. Отображение $\Psi : X \rightarrow Y$ называется α -накрывающим, если для любого $r > 0$ и любого $u \in X$ имеет место включение

$$\Psi(B_X(u, r)) \supseteq B_Y(\Psi(u), \alpha r).$$